Dlaczego nazwy liczb odczytujemy odwrotnie? Problem reprezentacji liczb.

Kazimierz Trzęsicki

1 grudnia 2021

Spis treści

0 Wstęp

Sposób reprezentacji wiedzy nie jest obojętny kognitywnie. Jest wiele uzasadnień i argumentów na rzecz tej tezy. Takim argumentem, samym w sobie historycznie ciekawym, jest kwestia reprezentacji liczb.

Kiedy odczytujemy jakiś wyraz, to czytamy go od początku. Gdzie jest początek? To zależy, jak piszemy. Piszemy z lewa na prawo, więc wyraz zaczyna się, ma początek ze swojej lewej strony. Jeśli zasłonimy końcowe litery wyrazu, to zwykle nie ma przeszkód, aby zacząć go odczytywać. Inaczej rzecz ma się z nazwami liczb. Kiedy z jakichś powodów część końcowa nazwy liczby jest zasłonięta, to nie wiemy, jak zacząć ją odczytywać. Na przykład, gdy w nazwie „2021” zasłonięte będą ostatnie dwie cyfry, to jak odczytać pierwsze dwie widoczne? Poniżej damy odpowiedź na pytanie, dlaczego tak jest, umieszczając ją w kontekście historycznym.

1 Początki liczenia

Kiedy małe dziecko ma podać ilość jakichś obiektów, to zwykło pokazywać tyle paluszków, ile jest tych liczonych obiektów. Tak zresztą uczą opiekunowie. Jest to naturalny sposób liczenia.

Pisze Marciszewski (2011, s. 165), że liczenie na palcach było genialnym pomysłem naszych prapradziadów i zauważa, że szympansy choć do nas podobne na to nie wpadły, a to daje do myślenia, jeśli chodzi o ludzki umysł. Liczenie na palcach było powszechne w średniowieczu. Tej sztuki nauczano. Instrukcję znajdujemy w ówczesnych podręcznikach, np. Luca Pacioli *Summa de Arithmetica* (1523) z 1494 r.[1] Ze stwierdzeniem Marciszewskiego współgra to, co pisze Boecjusz (1867, De numero lineari)[2]. Chociaż jedność sama nie jest liczbą liniową, ale, ponieważ brakuje jej w ogóle szerokości, jest podstawą poszerzania liczby na długość, również jest początkiem rozciągania liczby na wymiar szerokości. Liczby płaszczyznowe także, chociaż nie są bryłą, nadal są początkiem po uzupełnieniu o wymiar bryły. Liniowa liczba jest tą, która zaczyna się od dwóch z dodawaniem jedności. Do jednej tej samej i ciągłej linii dodaje się skumulowane ilości:

> Sic etiam in numero unitas quidem cum ipsa linearis numerus non sit, in longitudine, tamen distenti numeri est principium, et linearis numeris, cum ipse totius latitudinis espres sit, in aliud tamen spatium latitudinis, extenti numeri sortitur initium. Superficies quoque

numerorum cum ipsa solidum corpus non sit, addita tamen latitudini altitudine, solidi corporis caput est. Hoc autem planius his exemplis liquebit. Linearis numerus est a duobus inchoans, adiecta semper unitate in unum eundemque ductum quantitas explicata congeries, ut est id quod subiecimus.

II. III. IIII. IIIII. IIIIII. IIIIIII. IIIIIIII. IIIIIIIII.

Wśród podanych nazw liczb nie ma nazwy liczby jeden. Zrozumiemy to, jeśli weźmiemy pod uwagę, że choćby Arystoteles, definiując liczbę jako wielość nie uznawał jedynki za liczbę. Flamandzki matematyk i inżynier wojskowy Simon Stevin (Stenlund, 2014, s. 28–29), autor *De Thiende* (Sztuka dziesiątek) miał krytyczny stosunek do greckich matematyków — cenił tylko Archimedesa — w szczególności krytycznie odnosił się do tego, że jedność nie jest liczbą, lecz raczej zasadą, *arche*.

Ten związek cyfr z palcami znajduje odzwierciedlenie w języku łacińskim i w tych językach, które poszły jego śladem. Po łacinie „palec" to „digitus", a angielskie „digit" oznacza palec lub cyfrę.

W języku polskim nazwa „cyfra" oznacza jeden ze znaków: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Nazwa „cyfra" ma dokładnie dziesięć desygnatów. „Cyfra" oznacza więc nie tylko „0". W języku angielskim „cipher" oznacza cyfrę hinduską/arabską lub liczbę zero. „Cipher" może być też użyte jako nazwa obliczania, rachowania, szyfrowania, tajnego kodowania, a w odniesieniu do osoby kogoś bez wpływu, kogoś, kto jest zerem.

Zdaniem Mazura (2014, s. 44) nasz mózg jest zaprogramowany na liczenie i podobnie jak ruch palcami jest ono sterowane lewym płatem ciemieniowym. Można przyjąć, że w rozwoju ewolucyjnym pierwotną funkcją lewego płata ciemieniowego było sterowanie palcami, a dopiero później, kiedy kolejne pokolenia liczyły za pomocą palców, ta część mózgu zaprogramowała się na liczenie. Zapytajmy się, czy słusznie współczesna szkoła zrezygnowała z nauczania liczenia za pomocą palców. Czy takie palcowe ćwiczenia nie miałyby pozytywnego wpływu na rozwój myślenia matematycznego uczniów? Może jeszcze rodzice uczą dzieci liczyć, wykorzystując patyczki. To jednak nie to samo, co palce. Patyczki nie koniecznie tak aktywują mózg, jak liczenie na palcach.

2 Idea zera

Uniwersalny sposób zapisu wymaga znaku na nicość, pustkę. Zero jest niezbędne dla pozycyjnego zapisu nazw liczb. Zero okazuje się najważniejszą cyfrą. Wynalezienie go było, jak głosi to choćby Bartel Leendert van der Waerden (1961):

> a stroke of genius, to make something out of nothing by giving it a name and inventing a symbol for it.
>
> przejawem geniuszu, aby uczynić coś z niczego, nadać mu nazwę i wymyślić jego symbol.

Zero wymyślili Hindusi. Czy tylko oni? Twierdzi się, że najwcześniejsze dokładne i systematyczne zastosowanie symbolu zera i zasady pozycjonowania dokonane zostało przez Majów z Ameryki Środkowej już na początku naszej ery (Cajori, 1993, s. 4).

Jak to się stało, że idea zera zrodziła się w Indiach? Jakieś jej ślady znajduje się w pismach babilońskich i greckich. Przedmiotem rozważań pitagorejczyków były kształty i proporcje. Nicość nie ma sensu geometrycznego, nie reprezentuje żadnej figury. Nie pozostaje też w żadnej proporcji do czegokolwiek, a przecież to, co dla Pitagorasa i jego uczniów w kosmosie sensowne to wzajemne powiązanie przez proporcje. Arystoteles odrzucał istnienie pustki, próżni. Przypisywana jest mu zasada: *horror vacui*, czyli: przyroda nienawidzi próżni.

W *Biblii* istnienie i posiadanie imienia są utożsamiane. Imię może mieć tylko coś, co istnieje. Powołanie do życia dokonuje się głosem. Mojżesz pyta Boga objawiającego mu się w krzaku gorejącym o imię. Współplemieńcom mówi, że posłał go Jahwe: Ten, który jest. Nikt nie pyta, czy istnieje. Czy w takiej kulturze mogła się zrodzić idea zera?

W rzymskim systemie zero nie tylko, że nie jest potrzebne, lecz również kontr-intuicyjne. Nie liczymy kiedy nic nie ma. Zapis rzymski bazuje na dodawaniu (jedności). Dodawanie zera nic nie zmienia. Liczby są wytwarzane przez jedność, poza zerem: *omnis numerus ab una generatur, ipsa a nullo.*

Peter Gobets uważa, że

> Mathematical zero (‘*shunya*’ in Sanskrit) may have arisen from the contemporaneous philosophy of emptiness or *Shunyata* [a Buddhist doctrine of emptying one’s mind from impressions and thoughts].

> Matematyczne zero (‘*shunya*’ po sanskrycku) mogło mieć źródło w ówczesnej filozofii pustki lub *Shunyata* [buddyjska doktryna opróżniania umysłu z wrażeń i myśli].

Hindusi w swoich koncepcjach religijnych przyznali nicości pozytywny charakter. Mieli ideę nirwany. Te kultury, który nazywały tylko to, co istnieje nie wpadły na pomysł nazwania czegoś, czego nie ma, co jest pustką. To sanskryckie *sunya* (nicość, pustka) jako nazwa zera daje asumpt do odpowiedniej nazwy w języku arabskim a następnie łacinie (Trzęsicki, 1987). Hindusi mieli przesłanki dla idei zera, a inspirację do zajmowania się tym mogli czerpać z przekonania — np. głoszonego przez żyjącego w piątym wieku Aryabhata, autora *Aryabhatiya* — że zajmowanie się matematyką, geometrią i astronomią jest drogą do wyzwolenia.

Dzięki symbolowi zera możliwy stał się pozycyjny liniowy zapis nazw liczb, a to dawało podstawę do algorytmów operacji arytmetycznych. Jak pisze Whitehead (1911, s. 60–61):

> One very important property for symbolism to possess is that it should be concise, so as to be visible at one glance of the eye and to be rapidly written. Now we cannot place symbols more concisely together than by placing them in immediate juxtaposition. In a good symbolism therefore, the juxtaposition of important symbols should have an important meaning. This is one of the merits of the Arabic notation for numbers; by means of ten symbols, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, and by simple juxtaposition it symbolizes any number whatever.

> Bardzo ważną własnością, którą powinna mieć symbolika jest, aby była zwięzła tak, by była postrzegana jednym rzutem oka i była szybko zapisywalna. Ale nie możemy ułożyć razem symboli bardziej zwięźle niż ustawiając je bezpośrednio jeden po drugim. Dlatego w dobrej symbolice następowanie znaczących symboli powinno mieć znaczący sens. Jest to jedna z wartości arabskiej notacji dla liczb; za pomocą symboli, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i przez prostą kolejność symbolizujemy dowolną liczbę.

Zero jest niezbędne dla powzięcia idei liczb ujemnych. Liczby ujemne miały wymiar praktyczny w gospodarce, umożliwiały symboliczną reprezentację długu i pożyczki. Rewolucyjny w rozwoju matematyki jest wynaleziony przez Kartezjusza układ współrzędnych (kartezjańskich). Idea liczby zero jest warunkiem koniecznym tego pomysłu. Wiara w kreatywność pojęcia zera przyświecała założycielom *ZerOrgindia Foundation*, `https://www`

`.zerorigindia.org/`. Fundacja działa w przekonaniu, że lepsze rozumienia powstania ZERA prawdopodobnie spowoduje w przyszłości niewyobrażalne innowacje:

> A better understanding of the origin of ZERO, will likely cause more unimaginable innovations in the future.
>
> Lepsze rozumienie początków ZERO prawdopodobnie może spowodować niewyobrażalne innowacje w przyszłości.

3 Oswajanie z zerem

Nieintuicyjność zera znajduje wyraz w pojęciu liczby naturalnej. Jest zero liczbą naturalną, czy nie jest? Jedni, głównie logicy, informatycy i matematycy zajmujący się teorią zbiorów, uznają zero za liczbę naturalną inni — nie. We wszystkich językach liczba zero występuje poza systemem językowym: „mam jedno jabłko" brzmi naturalnie, a „mam zero jabłek" jest sztuczne. O wielkim matematyku Wacławie Sierpińskim opowiada się anegdotkę. Sierpiński nie mógł doliczyć się walizek przygotowanych do wyjazdu. „Zginęła jedna walizka", oświadczył żonie. „Pamiętam, że przyniosłem jedną, a ty powiedziałaś: no dobrze, to już szósta, ostatnia!". Żona rozejrzała się i stwierdziła: „są wszystkie". „Ależ skąd, liczyłem kilka razy: zero, jeden, dwa, trzy, cztery, pięć — a gdzie szósta?"

W chrześcijańskiej Europie — pomijając, że jest to okres wojen krzyżowych, wojen skierowanych przeciw arabskim okupantom Ziemi Świętej — przyjęcie cyfry zero związane było z przełamaniem bariery nazwania czegoś, co oznacza nicość, bowiem „The Ciphra 0 [...] of himselfe signifieth not" (cyfra 0 [...] sama przez się niczego nie oznacza (Digges & Digges, 1590). A nadto, przecież byłoby to przypadkiem *contradictio in adiecto*. A poza tym (Jordan, 1905, s. 159):

> Mußte dies den Romanen und Germanen als etwas Abgeschmacktes erscheinen, so war die orientalische Manier, an diesen scheinbaren Widerspruch mystisch-philosophische Betrachtungen zu knüpfen, bei den Abendländern geeignet, geradezu Verdacht zu erwecken: ein Zauber sei im Spiele. Der Kodex des Klosters Salem schreibt nämlich: „Jede Zahl entsteht aus der Eins, jene aber aus der Null."
>
> musiało się to Romanom i Germanom zdawać nieco absurdalne, ponieważ właściwa ludziom Zachodu orientalna maniera wiązania

> mistyczno-filozoficznych rozważań z tą pozorną sprzecznością tym samym budziła podejrzenie: magia jest w tej grze. W Kodeksie klasztoru z Salem jest mianowicie napisane: „Każda liczba powstaje z jedynki, ta zaś z zera.”

W ówczesnej kulturze rozumienia liczb mocno zdominowanej — co wciąż dziedziczymy — przez tradycję pitagorejską i kabałę, uznaniu zera za liczbę towarzyszyły spekulacje na temat jego pozamatematycznego znaczenia. Pitagoras był czczony jako mędrzec, mąż stanu i cudotwórca. To od „μαΘηματικοι” (*mathematikoi*), co po grecku dosłownie znaczy „uczeni”, nazwy najbardziej wtajemniczonej grupy założonego przez niego bractwa religijno-mistycznego, pochodzi dzisiejsza nazwa matematyki.

Świadectwem oddziaływania myśli żydowskiej są średniowieczne katedry (Schuchard, 2002, s. 24):

> It is perhaps one of the stranger ironies of history that this originally Jewish yearning for transmundane and numinous mathematics would find its greatest architectural expression in the towering Gothic cathedrals built by Christian stonemasons.
>
> Jest to być może jedna z nieznanych ironii historii, że pierwotna żydowska tęsknota za ponadziemską i świętą matematyką znalazła swój największy architektoniczny wyraz w strzelistych gotyckich katedrach budowanych przez chrześcijańskich kamieniarzy.

Więcej, uważa się, że budowniczowie gotyckich katedr (Akerman, 1998, s. 33):

> employed an eastern treasure of sacred geometry drawn from the Pythagorean school,
>
> zastosowali wschodnie bogactwo świętej geometrii wywodzącej się ze szkoły Pitagorasa,

którą pozyskali z żydowskiej tradycji. Arytmetyczne proporcje znalazły odzwierciedlenie w architekturze katedr (Masi, 2006, s. 31–38), (Ramzy, 2021).

Szczególna pozycja zera i jedynki daje racje dla różnych wyjaśnień. Czytamy (Ostashevsky, 2000, s. 11):

> One the striking aspects of Stevin’s *Arithmetique* (1585) is the way the zero takes over many of the traits formerly assigned to the one. In their respective concepts, the one and the zero are the origin of

number, but no number; they are also declared to be the arithmetical counterpart of the geometrical point.

> Jednym z uderzających aspektów *Arithmetique* (1585) Stevina jest to, że zero przejmuje wiele cech charakterystycznych uprzednio przypisywanych jedynce. W ich odpowiednich pojęciach, jedynka i zero są początkiem liczby, lecz nie liczbą; są one także ogłaszane jako odpowiednik punktu geometrycznego.

Dla neoplatoników Bóg, Jedność, jest początkiem rzeczy, ale nie jest rzeczą, jak jedynka nie jest liczbą, ale początkiem liczb.

„Podejrzliwość" wobec zera znajdowała wyraz w kulturze. Nie brakowało różnego rodzaju tekstów ośmieszających (Jordan, 1905, s. 168–171). Przykładem może być fragment wiersza *Lubecca*, którego autorem jest Henricus Aquipolensis:

> Ut pupa praesumpsit aquila esse, asinus leo quondam,
> Simia regnatrix — Cifra figura fore.

> Jak marionetka chciałaby być orłem, osioł lwem,
> Małpa królową — tak *pustka* chciałaby by być znakiem.

Zapoznaniu się z cyframi hinduskimi (arabskimi) — mimo, że jest to system dziesiętny — towarzyszy fascynacja zerem. Zeru nadaje się jakiś wymiar metafizyczny i teologiczny. W napisanym ok. 1143 r. (Menninger, 1958, s. 411) *Kodeksie z Salem* (Cantor, 1865, Epilogus de examinatione omnium specierum, s. 10) czytamy:

> Nec praetereundum est quod 0 per omnia omnibus algorizmi utitur legibus quemadmodum et alia figura, excepto quod nullum numerorum multiplicat, sed et ipsa a nullo multiplicatur. Quid enim [aliud] si dixeris milies nichil quam nichil? Aut nichil ad mille quam mille? Facit tamen quandam multiplicationem, sed tandum per decuplationem: Verba gratia praepone 0 uni, et fiunt X, praepone deceno et fiunt C., praepone centeno et erunt M. Et sciendum, quod in hoc magnum latet sacramentum. Per hoc, quod sine inicio est et fine, figuratur ipse, qui est vere alpha et ω, id est sine inicio et fine; et sicut 0 non auget nec minuit, sic ipse nec recipit aucmentum nec deterimentum; et sicut omnes numerus decuplat, sic ipse non solum decuplat, sed millificat, immo ut verius dicam omnia ex nichilo creat, conservat atque gubernat.

> Nie powinniśmy pominąć faktu, że 0 jest przedmiotem reguł algorytmicznych jak są inne cyfry, oprócz tego, że nie prowadzi do powiększenia żadnej liczby, a i samo nie powiększa się przez żadną liczbę. Jak faktycznie nazwalibyśmy tysiąckrotność nicości, jak nie nicością? Zaś nic dodane do tysiąca, jak nie tysiącem? Zero, jednakże, dokonuje pewnego rodzaju wzrost, lecz tylko przez zwielokrotnienie przez dziesięć: zatem, na mocy Słowa, połóż zero przed[3] jeden, a otrzymasz dziesięć, połóż przed dziesięć, a otrzymasz sto, połóż przed sto, a otrzymasz tysiąc. I trzeba wiedzieć, że wielka w tym kryje się tajemnica. Przez to, co jest bez początku i końca on sam siebie ukazuje jako ten, który prawdziwie jest alfa i ω, to jest bez początku ani końca, i tak, jak 0 nie rośnie ani nie maleje, tak on sam ani nie powiększa się, ani nie doznaje uszczerbku; i, jak ono wszystkie liczby udziesięciokrotnia, tak on sam nie tylko udziesięciokrotnia, ale utysiąckrotnia, co więcej, abym bardziej prawdziwie się wyraził, wszystko tworzy z niczego, zachowuje i kieruje.

4 Cyfra zero

Powyższy cytat inspiruje pytanie o kształt cyfry zero. Nie zaskakuje, że cyfra ta ma kształt okręgu — przecież nic lepiej nie obrazuje czegoś bez początku i bez końca, może kropka. Okręg jednak lepiej wyraża pustkę. Według hinduskiego mistycyzmu zero jest okrągłe, bo oznacza okręg życia, lub co było znane jako „wąż wieczności".

Podejmując kwestię symbolu zera nie unikniemy pytania o kształt litery „o". Zresztą, zdarza się nam pomylić jedno z drugim, literę z cyfrą. Są różne powody, dlaczego jedno i drugie mają podobne symbole. Amerykanie, w niektórych kontekstach, odczytują cyfrę zero jak literę „o". Nasze cyfry arabskie mają podobne symbole jak w sanskrycie. Okrąg już w sanskrycie był symbolem nicości, zera, choć początkowo zero oznaczano za pomocą kropki. Nie znaczy to, że nie było żadnych innych symboli. Kształty cyfr, w tym zera, były zmieniane (Cajori, 1993, s. 50–57).

Na dwa wieki przed naszą erą greccy astronomowie stosowali sześćdziesiątkowy system babiloński, co dziedziczymy do dzisiaj, posługując się tym systemem, w szczególności w miarach czasu. Zapisując liczby używali litery omikron, do oznaczania pustej przestrzeni. W Bizancjum było to zwykle $\bar{o}$ (Cajori, 1993, s. 28).

Greckie „o" wywodzi się z fenickiej litery *ayin*, a ta z arabskiej. Jej kształt

był inspirowany egipskim hieroglifem oka. Grecy adoptowali ten znak na greckie małe „o”, omikron. Znakiem wielkiego „O”, omegi jest: Ω. „Ω” wywodzi się z podwójnego omikron: ω. Omikron było też znakiem liczby 70. Kształt „Ω” miałby wzorzec w układzie ust, kiedy głoska ta jest wymawiana. „Ω” była też znakiem liczby 800.

Badania okręgu inspirowały rozwój geometrii, rachunku, astrologii, a w różnych okresach traktowano okręg jako sprawę boską, wiązano z wiedzą tajemną chronioną nawet karą śmierci (Jones, Adams, & Ellis, 2016, Eve Tuck and C. Ree, *A Glosary of Haunting*, s. 657–658). Kojarzenie boskości z okręgiem było obecne w kulturze wielu ludów.

Przytoczony fragment *Kodeksu z Salem* może wskazywać na to, że brak akceptacji na nazwanie czegoś, czego materialnie nie ma, zniwelowano, wiążąc z zerem coś duchowego. Zero jest „kreatywne”, bo ma wymiar duchowy.

John von Neumann (1922–23), mając zbiór pusty i operację tworzenia zbiorów ze zbiorów, zdefiniował liczby naturalne.

Współczesna fizyka głosi, że energia grawitacyjna ma przeciwny znak niż wszystkie inne rodzaje energii. Jeśli więc energia grawitacyjna całości kosmosu dokładnie równoważy energię związaną z masami ciał kosmicznych i innymi rodzajami energii, to łączna wartość energii wszechświata jest zerowa. Przed stworzeniem i po stworzeniu bilans energii jest zerowy. Wszechświat może kreować się z nicości. Pierwszym, kto rozważał tę możliwość był Edward Tryon z City University w Nowym Yorku, który pytał: „Is the Universe a Vacuum Fluctuation?” (1973). Stephen Hawking i Leonard Mlodinow w *The Grand Design* objaśniają powstanie świata bez hipotezy Boga. Piszą (2010, s. 180):

> Because there is a law such as gravity, the universe can and will create itself from nothing. Spontaneous creation is the reason there is something rather than nothing, why the universe exists, why we exist. It is not necessary to invoke God to light the blue touch paper and set the universe going.
>
> Ponieważ jest prawo takie, jak grawitacja, wszechświat może i będzie tworzyć sam siebie z niczego. Spontaniczna kreacja jest racją tego, że jest raczej coś niż nic, dlaczego istnieje wszechświat, dlaczego my istniejemy. Nie jest konieczne przywoływanie Boga, aby zapalić lont i poruszyć wszechświat.

W starożytnej Grecji liczba, ἀριΘμός (arithmós) była pojmowana jako skończona wielość złożona z jednostek (Arystoteles, 1983, 1020a14), (Fitzpatrick,

2008, s. 194).

Greckie myślenie matematyczne było geometryczne. Jako liczby nie pojmowali nie tylko nicości, lecz również jedności. Liczba była wielością. Kiedy mówimy — po polsku — że jest czegoś wiele, to rozumiemy, że tego czegoś są przynajmniej dwa egzemplarze.

Można przypuszczać, choćby w oparciu o jeszcze współcześnie trwające kultury plemienne, w których językach są nazwy na liczby jeden i dwa a nie ma, oprócz „wiele", innych nazw liczb większych, że w ogóle człowiek przez długie początkowe lata swojego rozwoju miał tylko te trzy określenia na ilość: jeden, dwa, wiele. Liczba trzy była odkryciem tak znaczącym, że zyskała szczególne miejsce w kulturze.

W liczbie trzy od starożytności dopatrywano się jakieś doskonałości. Posługiwano się nią przy ofiarach i modłach. Przytoczmy fragment wywodów Arystotelesa zawartych w *O niebie* (1980, 268a7–18):

> „Ciałem" (σῶμα) jest to, co jest podzielne we wszystkich wymiarach. Ta spośród wielkości, która rozciąga się w jednym wymiarze, jest linią; ta, która rozciąga się w dwóch wymiarach, jest powierzchnią; ta, która rozciąga się w trzech wymiarach, jest ciałem. Prócz tych nie ma żadnej innej wielkości, bo liczba „trzy" obejmuje wszystko, a „trzy razy" znaczy tyle co „całkowicie". W rzeczy samej, jak mówią pitagorejczycy, cały świat i wszystkie rzeczy w nim zawarte są określone liczbą „trzy"; koniec, środek i początek tworzą liczbę, która cechuje „całość", a liczba ta jest „triadą". Ponieważ uzyskaliśmy tę liczbę od natury, jak gdyby stanowiła ona jedno z jej praw, dlatego posługujemy się nią także w kulcie bogów.
>
> W podobny sposób posługujemy się w określaniu rzeczy, bo gdy mowa o dwóch przedmiotach, mówimy „oba"; gdy chodzi o dwóch ludzi, mówimy „obaj", a nie „wszystkie", „wszyscy". Tym ostatnim wyrazem zaczynamy się posługiwać dopiero w tedy, gdy mamy do czynienia z przynajmniej trzema rzeczami.

We współczesnym języku potocznym określenie czegoś lub kogoś jako zera jest pejoratywne.

5 System dziesiętny

Na dwa wieki przed naszą erą greccy astronomowie stosowali sześćdziesiątkowy system babiloński (Cajori, 1993, s. 28). Joseph Mazur (2014, s. 21) pyta,

dlaczego Grecy mimo swej błyskotliwości nie dostosowali systemu babilońskiego z jego pozycyjnością i relatywną łatwością zapisu liczb. Babilończycy mieli jasną ideę notacji pozycyjnej i użycia tych samych cyfr dla reprezentacji różnych potęg 60. I odpowiada, że być może dlatego, że do liczenia używali abaka lub być może dlatego, że byli bardziej zainteresowani okazałością zakresu samej matematyki niż samymi obliczeniami. Zauważa też, że (Mazur, 2014, s. 64):

> The difficulty is in distinguishing placeholder from number. Accepting zero as a number representing the absence of quantity would have been a fantastically daring idea.
>
> Trudność znajduje się w odróżnieniu pozycji miejsca od liczby. Akceptacja zera jako liczby reprezentującej brak ilości była fantastycznie śmiałą ideą.

Zdaniem Johna Barrowa (2000, s. 69) hinduski system rachowania jest prawdopodobnie najbardziej owocną intelektualną innowacją ludzkości w ogóle. Richard Fuller (1982, s. 25–26) twierdzi, że:

> The fifteenth-century Europeans' adoption of Arabic numerals and their computation-facilitating "positioning-of-numbers" altogether made possible Columbus's navigational calculations and Copernicus's discovery of the operational patterning of the solar system and its planets. Facile calculation so improved the building of the ships and their navigation that the ever-larger ships of the Mediterranean ventured out into the North and South Atlantic to round Africa and reach the Orient. With Magellan's crew's completion of his planned circumnavigation, the planet Earth's predominantly water-covered sphericity was proven. The struggle for supreme mastery of human affairs thus passed out of the Mediterranean and into the world's oceans.
>
> Przejęcie w XV w. przez Europejczyków arabskiej numeracji i jej rachunkowych ułatwień przez „pozycjonowanie liczb", ostatecznie uczyniło możliwymi Kolumba obliczenia nawigacyjne i Kopernika odkrycie uwarunkowań działania systemu słonecznego i jego planet. Ułatwione obliczenia polepszyły budowę statków i ich nawigację tak, że coraz większe statki ze Śródziemniomorza wyprawiały się na Północny i Południowy Atlantyk dookoła Afryki i osiągnęły Orient. Wraz z zakończeniem przez załogę Magellana zaplanowanego opłynięcia, została dowiedziona kulistość planety Ziemia, która przeważnie pokryta jest

wodą. Walka o najwyższe panowanie ludzkich spraw przeszła przez Śródziemnomorze na światowe oceany.

Początki stosowania w Europie systemu dziesiętnego wiązane są z Gerbertem z Aurillac (ok. 946–1003), późniejszym papieżem Sylwestrem II (był nim od 999 r. do swojej śmierci) (Friedlein, 1861; O'Connor & Robertson, 2012). Sylwester II m.in. ustanawiał organizację kościelną na ziemiach Polan. Gilbert kształcił się w klasztorach w Katalonii, gdzie były dostępne rękopisy muzułmańskie, w szczególności z Kordoby, ówczesnego centrum intelektualnego. Jego nauczycielem miał być Żyd Josephus Hispanus (Jordan, 1905, s. 155). Z powodu umiejętności obliczania był posądzany o konszachty z diabłem, co znalazło wyraz w rycinie z 1460 r. W *Materialien zur Geschichte der arabischen Zahlzeichen in Frankreich* (Jordan, 1905, s. 156) czytamy:

> Ja Wilhelm [von Malmesbury] erklärt selber: „Aber dies alles möchte man für Erfindungen halten, weil doch das Volk gewohnt ist, den Ruhm der Gelehrten zu beschmutzen, indem sie von jedem, der etwas außerordentliches leistet, behaupten, er habe mit einem Dämon Verkehr gehabt." Niemand anders soll nämlich dem späteren Papste die Kunst, mit arabischen Zeichen zu rechnen, gezeigt haben, als der Teufel. Und man nennt sie ja auch heute noch die „Teufelskunst".

> Wszak Wilhelm [z Malmesbury] sam wyjaśnia: „Zaś to wszystko można by uznać za wynalazek, jednak przecież lud zwykł sławę uczonych zmącić, stąd każdego, kto uzyskał coś nadzwyczajnego, uznaje, że ma konszachty z demonem." Nikt inny nie powinien późniejszemu papieżowi pokazać sztuki rachowania arabskimi znakami jak tylko diabeł.

Do rozpowszechnieniu arabskiego zapisu przyczynili się ludzie interesu. Pisze Jordan (1905, s. 192):

> Dreimal hat der Kaufmannsstand in der Geschichte der arabischen Zahlzeichen in romanischen Ländern eine entscheidende Rolle gespielt. Es ist wahrscheinlich, daß er beim ersten Import aus Spanien die Hand mit im Spiele gehabt hat. — Leonardo Pisano war Kaufmann, der praktische Zweck hat in seinem Lehrbuch an erster Stelle gestanden und hat ihm für die Dauer des Mittelalters in Italien die Herrschaft gesichert. — In Frankreich waren es am Ausgang des Mittelalters wiederum Kaufleute, die eine entstandene Lücke ausfüllten, gleichsam die arabischen Zahlzeichen für ihren Eroberungsgang im 16. Jahrhundert noch fertig machten.

> Da verschwand dann alles, was ihnen an Komischem und Mystischem angehangen hatte, nur wenige Ausdrücke und Redensarten blieben bestehen, als fossile Reste aus einer vergangenen, wenig kritisch angelegten Zeit.
>
> W historii arabskich cyfr w krajach romańskich trzykrotnie kupiectwo odegrało decydującą rolę. Prawdopodobne jest, że miało swój udział w pierwszym ich pozyskaniu z Hiszpanii. — Leonardo Pisano był kupcem, jego podręcznik na pierwszym miejscu stawiał cel praktyczny, co zapewniło mu trwałą powszechność w średniowiecznej Itali. — We Francji u schyłku średniowiecza znowu kupcy, którzy wypełnili powstałą lukę, jakby uczynili gotowymi cyfry arabskie na swoje przejście w 16. wiek.
>
> Tak przepadło wtedy wszystko, co doczepiono im komicznego i mistycznego, tylko pozostały nieliczne wyrażenia i zwroty, jak skamieniałe pozostałości mało krytycznie ukierunkowanego czasu, który przeminął.

Udział ludzi praktyki miał istotne znaczenie nie tylko dla rozpowszechnienia cyfr arabskich ale i wytworzenia nowego paradygmatu matematyki skoncentrowanego na operacjach na liczbach, a nie na samych liczbach.

Ludzie nauki, z powodu ówczesnego paradygmatu matematyki, spekulatywnej arytmetyki nauczanej w ramach *quadrivium* — zainteresowani przedmiotami raczej niż operacjami matematycznymi, a także powiązaniami kabalistycznymi — pozostawali przy systemie rzymskim, a ten nie inspirował zainteresowania operacjami. Nowy paradygmat matematyki formowały prace inżynierów takie, jak np. *L'Arithmetique* (1585) Simona Stevina i *An Arithmetical Warlike Treatise Named Stratioticos* (1590) Leonarda i Thomasa Diggesów. Teksty arytmetyki praktycznej pisane były w języku rodzimym. Co nie znaczy, że praktycy nie czynili tego bez oporów. Przyzwyczajenia są oczywistą przeszkodą, ale przejście na system dziesiętny wymagało też zmiany jednostek pieniężnych oraz jednostek wag i miar. Na przykład system monetarny Wielkiej Brytanii został zmieniony na dziesiętny dopiero w 1970 r.

6 Zapis liczb

System pozycyjny Europa w średniowieczu przejęła za pośrednictwem Arabów od Hindusów. Fibonacci (Leonardo Bonacci, Leonardo z Pizy lub Le-

onardo Bigollo Pisano) o nauce pobieranej na terenie obecnej Algierii pisał (Menninger, 1969, s. 425):

> Ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuris Indorum introductus.
>
> Gdzie przez wspaniałego nauczyciela zostałem wprowadzony w sztukę za pomocą dziewięciu cyfr hinduskich.

W *Liber Abaci* (1202, Cap. I) czytamy:

> Novem figure Indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabic cephirum appellatur, scribitur quilibet numerus.
>
> Dziewięć cyfr hinduskich to 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Z nimi i ze znakiem 0, który Arabowie nazywają *cipherum*[4], dowolna liczba może być napisana.

W *Carmen de Algorismo* lub *Algorismus metricus*[5], wierszu łacińskim dla potrzeb dydaktyki przypisywanym Aleksandrowi de Villa Dei (Alexander de Villedieu), czytamy:

> Hinc incipit algorismus.
> Haec algorismus ars praesens dicitur in qua
> Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris
> 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1,
>
> Tu zaczyna się algorytm.
> Ta nowa sztuka jest nazwana algorytmem, w którym
> z tych dwukrotnie pięciu cyfr
> 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1,
> od Hindusów czerpiemy taką korzyść.

W obu cytatach kolejność wskazywania cyfr jest różna do tej, do której jesteśmy przyzwyczajeni. Jest tak dlatego, że Arabowie, jak to jest u Semitów, pisali (i czytali) z prawa na lewo. Wraz z cyframi hinduskimi od Arabów przejęliśmy również semicki sposób ich reprezentacji, a zapisujemy tak, jak jest to dla nas zwyczajne: z lewa na prawo. A co z odczytywaniem? W języku polskim odczytujemy po „semicku” liczby dwucyfrowe do dwudziestu i takież końcówki innych liczb, a więc: 11 — jedenaście, czyli jeden dziesięć; 12 — dwanaście, czyli dwa dziesięć, itd. Powyżej dwudziestu jest już: 21 — dwadzieścia jeden, 22 — dwadzieścia dwa, itd.

W języku niemieckim taka praktyka obejmuje jeszcze liczby od 21 do 99 oraz ich odczytywanie jako końcówek nazw większych liczb. W Turcji po reformach Atatürka nazwy liczb, również tych od 11 do 19 odczytywane są zgodnie z kolejnością cyfr z lewa na prawo (Voigt, 2008, s. 113), czyli: 11 — dziesięć jeden; 12 — dziesięć dwa, itd.

Dlaczego w języku niemieckim nazwy liczb dwucyfrowych i ostatnie dwie cyfry nazw liczb większych są odczytywane w innej kolejności niż są pisane, czyli — inaczej mówiąc — dlaczego semicki sposób odczytywania ma szerszy zakres (Gerritzen, 2008, Das Stellenwertsystem und Jakob Köbel)?

W pierwszym drukowanym podręczniku w języku niemieckim wydanym w 1482 r. jego autor nie podał sposobu odczytywania arabskich nazw liczb dwucyfrowych. W książce Jakoba Köbla wydanej w 1517 r. (Hergenhahn, 2008) podawany jest sposób odczytywania takich nazw, np. 21 — „zwentzigeins", „zwanzigeins" (Gerritzen, 2008, s. 24). Rozstrzygnięcia dokonał Marcin Luter (Gerritzen, 2008, s. 24):

> In der Übersetzung der Bibel ins Deutsche schloss sich Luther dem Vorschlag von Köbel für Zahlenbenennungen nicht an, wodurch sich die verdrehte Zahlensprechweise etabliert hat. Man kann aber annehmen, dass Köbel versucht hat, Luther für seine Zahlensprechweise zu gewinnen. Auch Adam Ries, der ab 1522 zahlreiche Rechenbücher herausbrachte, blieb bei der verdrehten Sprechweise. [...] Aus diesem Gründen blieb es bei einer unvollstädingen Reform, in der nur die Schreibweise, aber nicht die Sprechweise von Zahlem verändert wurde.

> Kiedy Luter przekładał *Biblię* na niemiecki nie zgodził się z propozycją Kölbe w sprawie nazw liczb, dlatego ustalił się odwrotny sposób wymawiania liczb. Można przyjąć, że Köbel próbował namówić Lutra na swój sposób wymawiania liczb. Także Adam Ries, który od 1522 r. wydawał liczne podręczniki rachunków, pozostał przy odwrotnym sposobie mówienia. [...] Z tych powodów nie została skończona reforma, która miała zmienić nie tylko sposób pisania, lecz także mówienia.

Dodajmy, że Lothar Gerritzen założył *Zwanzigeins*[6], towarzystwo na rzecz zmiany dotychczasowego sposobu odczytywania nazw liczb w języku niemieckim.

Rozumienie zapisu:

$$a_n a_{n-1} \dots a_0$$

dokonuje się według wzorca:

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0 10^0,$$

a zatem w wykładnikach (na pozycjach potęg dziesięciu) jest porządek wyznaczony kolejnością liczb z prawa na lewo. Pełna realizacja porządku z lewa na prawo — w jakim zwykliśmy czytać — byłaby, gdyby kolejność cyfr w zapisie była dokonana według wzorca, jaki stosuje się do wypowiadania (ale nie do zapisywania) liczb dwucyfrowych w języku niemieckim:

$$a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_n 10^n.$$

Taki zapis byłby zgodny z „niemieckim" sposobem wypowiadania nazw liczb dwucyfrowych i dwucyfrowych końcówek.

24

wypowiadalibyśmy: dwa i czterdzieści. A

356

wypowiadalibyśmy: trzy i pięćdziesiąt, i sześćset. Zapis ten nie zmuszałby do zabiegu, który musimy wykonać dla obecnego zapisu, a mianowicie policzenia ilość cyfr. W zapisie tym potęga dziesiątki byłoby zgodna z kolejnością w zapisie z lewa na prawo, a nie odwrotnie, jak jest obecnie (i jak zostanie).

7 Zakończenie

Reprezentacja liczb w systemie arabskim/hinduskim okazała się istotna dla rozwoju matematyki. Pytamy się, czy to, że liczby zapisujemy po semicku, choć fizycznie piszemy z lewa na prawo, a odczytujemy według ogólnej zasady tak, jak zapisujemy, ma jakiś wymiar kognitywny? Czy ma jakiś wpływ na nasze rozumienie i postrzeganie liczb? Zdaje się, że jest to bez znaczenia.

Konsekwencją przejęcia semickiego sposobu zapisu jest sposób wykonywania algorytmów (pisemnego) dodawania, mnożenia itd. Argumenty liczbowe podpisujemy pod sobą zgodnie z potęgą dziesięciu od prawej strony na lewą, czyli zgodnie z semickim sposobem pisania. Wydaje się, że ta „odwrotność" algorytmu nie ma praktycznych konsekwencji.

Czy sposób zapisu liczb ma jakieś konsekwencje praktyczne? Jedyne, co przychodzi na myśl to prezentowanie cen. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że bardziej zwracamy uwagę na to, co postrzegamy pierwsze, to możemy uznać, że typowe w handlu zaniżanie pierwszej cyfry w nazwie liczby może sprzyjać (nieuświadamianemu) przekonaniu, że cena oferowanego produktu jest niższa, niż faktycznie jest. Taki efekt uzyskuje się, kiedy np. „2000" zastąpione jest przez „1999" — trudniej podejmuje się decyzję o zakupie produktu za dwa tysiące, a łatwiej za tysiąc „z groszami".

Przypisy

[1] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-paciolis-summa [20.11.2020]

[2] s. 78, https://transcription.si.edu/view/7275/SIL-39088003533734_0002 [30.11.2020]

[3] Znaczy, że liczby zapisywane są na sposób arabski: z prawa na lewo.

[4] Jest to pierwsze znane użycie tego słowa.

[5] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/35/Carmen_de_Algorismo.pdf [13.10.2020]

[6] https://zwanzigeins.jetzt [24.10.2020]

Bibliografia

Akerman, S. (1998). *Rose Cross over the Baltic: The spread of Rosicrudanism in northern Europe.* Leiden: Brill.

Arystoteles. (1980). *O niebie.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. (Przełożył, wstępem, komentarzem i skorowidzem opatrzył Paweł Siwek)

Arystoteles. (1983). *Metafizyka.* Warszawa: PWN. (Przełożył, wstępem, komentarzem i skorowidzem opatrzył Kazimierz Leśniak)

Barrow, J. D. (2000). *The book of nothing. Vacuumus, voids and the latest ideas about the origin of the universe.* London: Vintage Books. https://archive.org/details/indextocriticism00glor.

Boethius, A. M. S. (2006). *Boethian number theory: A translation of the* De Institutione Arithmetica *(with introduction and notes)* (Vol. 6; M. Masi, Ed.). Amsterdam — New York, NY: Rodopi.

Boetii, A. M. T. S. (1867). *De institutione arithmetica* (Vols. 1–2; G. Friedlein, Ed.). Lipsiae: B. G. Teubneri. https://la.wikisource.org/wiki/De_Arithmetica, https://www.documentacatholicaomnia.eu/03d/0480-0524,_Boethius,_De_Arithmetica,_LT.pdf. (Tłumaczenie angielskie (Boethius, 2006))

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations.* New York: Dover Publications, Inc. (Two volumes bound as one. Volume I: Notations in Elementary Mathematics. Volume II: Notations Mainly in Higher Mathematics)

Cantor, M. (1865). Über einen Codex des Klosters Salem. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, *10*, 1–16. https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/12869/.

Digges, L. (1579). *An arithmetical warlike treatise, named stratioticos.* London: Henrie Bynneman.

Digges, L., & Digges, T. (1590). *An arithmetical warlike treatise named stratioticos* (see (Digges, 1579) ed.). London: Richard Field.

Fibonacci: Pisanus, Leonardus. (1202). *Liber abbaci.* https://la.wikisource.org/wiki/Liber_abbaci.

Fitzpatrick, R. (Ed.). (2008). *Euclid's elements of geometry* (First edition — 2007 Revised and corrected — 2008 ed.). https://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf. (The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I. L. Heiberg, in aedibus B. G. Teubneri, 1883–1885; edited,

and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick)

Friedlein, G. (1861). *Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern: Ein Versuch in der Geschichte der Arithmetik*. Erlangen: Verlag von Theodor Blaesing. https://ia800205.us.archive.org/28/items/gerbertdiegeome01dostgoog/gerbertdiegeome01dostgoog.pdf.

Fuller, R. B. (1982). *Critical path*. San Francisco, CA: Estate of R. Buckminster Fuller. (Contributor: Kiyoshi Kuromiya)

Gerritzen, L. (2008). Warum wir Zahlem von hinten nach vorne lesen und warum das nicht so bleiben muss. In L. Gerritzen (Ed.), *Zwanzigeins: für die unverdrehte Zahlensprechweise; Fakten, Argumente, Meinungen* (pp. 22–33). Bochum: Brockmeyer Verlag. https://zwanzigeins.jetzt/downloads/Gerritzen%20et%20al%20(2008)%20-%20Zwanzigeins.pdf.

Hawking, S., & Mlodinow, L. (2010). *The grand design*. New York: Bantam Books.

Hergenhahn, R. (2008). Die Köbelschen Zahlentafeln in seinen Rechenbüchern. In L. Gerritzen (Ed.), *Zwanzigeins: für die unverdrehte Zahlensprechweise; Fakten, Argumente, Meinungen* (pp. 109–112). Bochum: Brockmeyer Verlag. https://zwanzigeins.jetzt/downloads/Gerritzen%20et%20al%20(2008)%20-%20Zwanzigeins.pdf.

Jones, S. H., Adams, T. E., & Ellis, C. (Eds.). (2016). *Handbook of autoethnography*. London and New York: Routledge.

Jordan, L. (1905). Materialien zur Geschichte der arabischen Zahlzeichen in Frankreich. *Archive für Kulturgeschichte*, *3*(2), 155–195. https://archive.org/details/materialenzurges00jord/mode/2up.

Marciszewski, W., & Stacewicz, P. (2011). *Umysł — komputer — Świat: O zagadce umysłu z informatycznego punktu widzenia* (prof. Leonard Bolc, Ed.). Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT.

Masi, M. (2006). *Boethian number theory: A translation of the* De Institutione Arithmetica *(with introduction and notes)*. Amsterdam — New York: Rodopi.

Mazur, J. C. (2014). *A short history of mathematical notation and its hidden powers*. Princeton: Princeton University Press.

Menninger, K. (1934). *Zahlwort und Ziffer: Aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbrettes*. Breslau: Ferdinand Hirt.

Menninger, K. (1958). *Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl* (2nd ed., Vols. 1–2). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. (First edition: (Menninger, 1934))

Menninger, K. (1969). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. Cambridge, MA: M.I.T. Press. (Translation of (Menninger, 1958))

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2012). Gerbert of Aurillac. In *MacTutor history of mathematics.* School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gerbert/.

Ostashevsky, E. (2000). *Quintessence from nothingness: Zero, Platonism, and the Reneaissance* (a dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, Stanford University, 300 North Zeeb, Ann Arbor, MI). https://www.academia.edu/43659945/Quintessence_from_nothingness_9986171_978_0_599_93154_1.

Pacioli, L. (1523). *Summa de arithmetica geometria proportioni: et proportionalita . . . .* Paganino de Paganini. Retrieved from https://books.google.pl/books?id=iqgPe49fhrsC

Ramzy, N. S. (2021, June). Concept cathedral and "squaring the circle": Interpreting the Gothic cathedral of Notre Dame de Paris as a standing hymn. *Frontiers of Architectual Research*, *10*(2), 369–393. doi: 10.1016/j.foar.2021.02.001

Schuchard, M. K. (2002). *Restoring the temple of vision: Cabalistic freemasonry and Stuart culture*. Leiden-Boston-Köln: Brill.

Stenlund, S. (2014). *The origin of symbolic mathematics and the end of the science of quantity* (Vol. 59). Uppsala: Uppsala Universitet.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmetique.* Leyde: De l'Imprimerie de Christophle Plantin. https://books.google.pl/books?id=1dU5AAAAcAAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false.

Tryon, E. P. (1973). Is the universe a vacuum fluctuation? *Nature*, *246*, 396–397. doi: 10.1038/246396a0

Trzęsicki, K. (1987). Rola pojęcia niebytu w twórczości matematycznej. *Idea. Studia nad strukturą i rozwojem pojęć filozoficznych*, *2*, 75–85. (Czarnawska, M. and Kopania, J. (red.))

Voigt, J. (2008). Die konsequente Zahlensprechweise in der Türkei. In L. Gerritzen (Ed.), *Zwanzigeins: für die unverdrehte Zahlensprechweise; Fakten, Argumente, Meinungen* (pp. 113–114). Bo-

chum: Brockmeyer Verlag. https://zwanzigeins.jetzt/downloads/Gerritzen%20et%20al%20(2008)%20-%20Zwanzigeins.pdf.

von Neumann, J. (1922–23). Zur Einführung der transfinite Zahlen. *Acta Litt. Ac. Asc. Hung. Fran. Joseph.*, *1*, 199–208.

Waerden, B. L. Van der. (1961). *Science awakening*. New York: Oxford University Press. (English translation by Arnold Dresden, with additions of the author.)

Whitehead, A. N. (1911). *An introduction to mathematics*. London: Williams and Norgate. https://archive.org/details/introductiontoma00whitiala.